Развитие пространственного воображения учащихся в процессе изучения математики.

Своеобразие геометрии, выделяющее ее среди других разделов математики, да и всех наук вообще, заключается в неразрывном органическом соединении живого воображения со строгой логикой. Геометрия в своей сути и есть пространственное воображение, пронизанное и организованное строгой логикой.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет одной из двух сторон, нет и подлинной геометрии.

Наглядность, воображение принадлежат больше к искусству, строгая логика – привилегия науки. Сухость точного вывода и живость наглядной картины – “лед и пламень не столь различны меж собой”. Так геометрия соединяет в себе эти две противоположности. Так ее и надо изучать, соединяя живость воображения с логикой, наглядные картины со строгими формулировками и доказательствами.

Поэтому основное правило изучения геометрии состоит в том, что встречаясь с определением, теоремой или задачей, нужно прежде всего представить и понять их содержание: представить наглядно, нарисовать или, еще лучше, хотя и труднее, вообразить то, о чем идет речь, и одновременно понять, как это точно выражается.

Не секрет, что многие учащиеся не обладают достаточно развитым пространственным воображением. Проблема старая, но актуальная. Если учитель не решает ее еще тогда, когда ведет младшие и средние классы, то через несколько лет его уроки стереометрии с теми же учениками будут терять большую часть своей эффективности.

Все психологические процессы, в том числе и пространственное воображение, развивается и совершенствуется в результате деятельности. Эта деятельность должна чем-то стимулироваться и направляться, т.е. необходима система упражнений.

За годы работы в школе, я пришла к выводу, что пространственное воображение учеников следует развивать с первых уроков математики в пятом классе.

В настоящее время разработаны различные системы развития пространственного воображения у младших школьников, в том числе и компьютерные. Я на протяжении ряда лет использую простую систему - упражнения, направленные на подготовку учащихся к овладению систематическим курсом геометрии.

Начальный курс геометрии начинается с точек и прямых, потом идут углы, потом треугольники и т.д. Но ученики не знают, что будет впереди, не ведают ни о цилиндрах, ни о пирамидах.

Разъединенность планиметрии и стереометрии – весьма вредная для дела особенность курса. У учащихся подавляется пространственное воображение. Последние издания учебника “Геометрия”, 10 – 11 классы авторов Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов и др. пытаются сгладить переход от планиметрии к стереометрии, изображая объемные тела цветными, но при переходе учащихся от учебника к рабочим тетрадям эта попытка сходит на нет. Изображение фигуры в тетради становится бесцветным, и учащиеся испытывают затруднения в чтении и изображении таких рисунков. (Не заставлять же старшеклассников рисовать цветными карандашами!)

Позволю себе обратиться к истокам геометрии. Первоначальные геометрические сведения, дошедшие до нас, содержатся в египетских папирусах и вавилонских клинописных таблицах, имеющих более чем четырехтысячелетнюю давность. Получение новых геометрических фактов при помощи рассуждений (доказательств) относится к VI в. до н.э. и связано с именем древнегреческого математика Фалеса, который впервые применил движения: перегибание чертежа, поворот части фигуры и т.д. Постепенно геометрия становится дедуктивной наукой, т.е. наукой, в которой подавляющее большинство фактов устанавливается путем вывода, доказательства. Вершиной древнегреческой геометрии была книга “Начала”, написанная Евклидом (III в. до н.э.), содержащая свойства параллелограммов и трапеций, подобие многоугольников, теорему Пифагора и т.д.

В нынешнем курсе представлен, лишь, евклидов этап истории геометрии, а доевклидов не рассматривается вовсе. Не отражено в нем то время, когда ученые еще не владели методами строгих доказательств, но знали уже практически все, что входит в нынешнюю школьную геометрию. Поэтому каждый из нас, и я в том числе, стараемся познакомить учащихся перед систематическим курсом со всеми объектами изучения.

В процессе формирования геометрического знания школьников на разных этапах обучения возникают задачи, которые различаются полнотой познавательной информации как логической, так и образной. При этом отсутствие или недостаток фактического материала создает проблемные ситуации, неопределенность которых заставляет включаться в поиск решения задачи воображение. Специалисты рассматривают воображение, как особую форму человеческой психики, стоящую отдельно от остальных психических процессов и вместе с тем, занимающую промежуточное положение между восприятием, мышлением и памятью (Л. С. Выготский, С. Л. Рубинштейн и др.). По их мнению, воображение выступает своеобразным сплавом сферы чувственности и сферы мышления, где чувственность является основой, материалом, из которого строятся образы, мышление же играет ведущую программирующую роль в этом процессе.

Особую роль процессу воображения в структуре познания отводили не только психологи и философы, в работах которых воображение являлось предметом исследования, но и математики, которые привлекали воображение для характеристики специфических особенностей геометрического знания. А. Д. Александров, рассуждая о геометрии, писал, «воображение дает непосредственное видение геометрического факта и подсказывает логике его выражение и доказательство, а логика, в свою очередь, придает точность воображению и направляет его к созданию картин, обнаруживающих нужные логике связи» .

Действительно возможность создавать что-либо новое, необычное закладывается в детстве через развитие высших психических функций, таких как мышление и воображение.

Воображение – это присущая только человеку возможность создания новых образов путём переработки предшествующего опыта. Воображение часто называют фантазией. Воображение отражает действительность, однако с его помощью осуществляется мысленный отход за пределы непосредственно воспринимаемого.

Любое обучение связано с необходимостью что-то представлять, воображать, оперировать абстрактными образами и понятиями. Всё это невозможно сделать без воображения и фантазии.

Отечественный психолог В. Н. Брушлинский считал, что воображение – одна из форм мышления. Развитие воображения проходит две фазы и очень тесно связано с развитием рассудочной деятельности. Эту связь отражает так называемая «кривая Рибо».

Первый период развития воображения иллюстрирует кривая I-M, а рассудочную деятельность R-X. Этот период охватывает приблизительно первые 15 лет жизни человека. Затем рассудочная деятельность сохраняет своё прогрессивное развитие (кривая X-O), а воображение, в большинстве случаев, характеризуется падением интенсивности (кривая M-H).Чем меньше падение кривой M-H, тем больше способности проявляет человек. Когда же кривая воображения сохраняет стабильность или своё прогрессивное направление (M-N), то можно говорить об одарённости или гениальности.

Воображение и фантазия присущи каждому человеку, но люди различаются по направленности этой фантазии, её силе и яркости.

Затухание функции воображения с возрастом – отрицательный момент для личности. Вместе с тем, воображение может не только облегчить процесс обучения, но и само развиться при соответствующей организации учебной деятельности.

Мышление – это высшая форма творческой активности человека.

Уже давно учёные пытались разгадать загадку творчества. Первыми объектами изучения были люди науки и искусства. Анализировались их дневники, письма, высказывания. Большинство авторов великих изобретений выделяли две стадии творческого процесса: первая стадия – длительное размышление над изученными фактами и явлениями; вторая стадия – короткое озарение и интуитивно принятые решения. Изобретатель Томас Эдисон так определил процесс творчества: «Изобретение – это 99% пота и 1% вдохновения».

Сколько раз в течение урока мне приходится видеть отсутствующий, равнодушный взгляд ученика, или отчаянно взволнованный, молящий о помощи увидеть, понять то, о чем идет речь, увидеть фигуру такой, какой она должна быть, понять, почему точка будет находиться именно здесь, а не в другом месте. Речь в данном случае идет о построении правильного чертежа к задаче, и не только стереометрического, но и планиметрического.

Поэтому стараюсь познакомить учащихся перед систематическим курсом со всеми объектами изучения, ставя перед собой задачу - выстроить уже знакомый материал так, чтобы удалось доказать справедливость уже известных фактов и других, еще неизвестных. Считаю, что те умения, которые удается сформировать, делают изучение геометрии не таким трудным.

Замечу, что для решения многих задач не надо специальных знаний, т. е. их можно предлагать учащимся уже в пятом классе.

Первую серию задач условно можно назвать "выходом в пространство". Это устные задачи, в которых, казалось бы, ничего не сказано о пространстве. Даже наоборот, упоминание о треугольниках в задаче 2 и о расположении и монет в задаче 3 (читатель сразу думает, что монеты должны лежать на плоскости) навязывает "плоскостные" образы. Нужно преодолеть это, "вывести" свою мысль "в пространство", чтобы правильно выполнить предложенные задания.

Например:

1. Разделите круглый сыр тремя разрезами на восемь частей.

2. Из шести спичек сложите четыре правильных треугольника так, чтобы стороной каждого была целая спичка.

3. Расположите пять одинаковых монет так, чтобы каждая из них касалась четырех остальных.

4. Можно ли расположить шесть одинаковых карандашей так, чтобы каждый касался пяти остальных? (Ответы смотри в приложении1)

Часто приходится сопровождать изучение аксиом стереометрии и их следствий изображением многогранников, решением задач на построение сечений и т.д. Но ученики должны "видеть" этот многогранник. Поэтому еще до изучения стереометрии предлагаю задачи с кубом, параллелепипедом, некоторыми другими геометрическими телами. Эта группа заданий связана с иллюзиями и невозможными объектами.

На этом рисунке <Рисунок1> любой из нас видит куб, а не только два квадрата, вершины которых попарно соединены. А нарисованы все-таки квадраты… Видеть куб нам позволяет хорошо развитое пространственное воображение. Но удивительно: один раз мы видим этот куб как бы сверху и справа <Рисунок2>, а другой – снизу и слева <Рисунок3>. Это уже казусы иллюзии, которыми надо уметь управлять, подчиняя свое воображение, той реальности, о которой говорится в конкретной задаче.

Но многие учащиеся не могут сразу научиться видеть в плоской фигуре выпуклые тела. Помочь им еще в средних классах наша задача. Предлагаю ряд плоскостных рисунков, направленных на преодоление трудности восприятия.

Например:

5. Закройте листом цветной бумаги переднюю грань куба и опишите свои впечатления. (Более четко просматривается такой куб, как на рисунке 2)

6. Закройте листом цветной бумаги заднюю грань куба и постарайтесь передать свои впечатления рисунком. На что похож ваш рисунок: на шкафчик? полочку?

7. Попробуйте представить, глядя на рисунок, сначала коридор <Рисунок4> (трубу <Рисунок5>, по которому вы движетесь, затем перевернутое детское ведерко, на кторое вы смотрите сверху. (В первом случае больший квадрат (окружность) находится ближе к нам, во втором – дальше).

Следующая серия заданий использует развертки куба, призмы, цилиндра и конуса.

8. Сколько граней у шестигранного карандаша? (Восемь, если карандаш не заточен. Часто отвечают “шесть”).

9. Из бумаги склеили куб. Ясно, что его можно разрезать на шесть равных квадратов. А можно ли его разрезать на двенадцать квадратов? (Нетрудно доказать, что фигура состоящая из объединения треугольников передней и верхней граней, расположенных в одной плоскости, есть квадрат). <Рисунок6>

Следующая серия заданий – это задания на проекции. С прошлого учебного года у меня появилась ещё одна возможность для решения таких задач: веду черчение, в прошлом году это были мои восьмиклассники, нынешний 9 класс.Дети очень часто играют, изображая различные тени на стене, столе и т.д. В качестве примера приведу следующие задачи:

11. Какую форму имеет тень куба на плоскость, перпендикулярную его диагонали, от пучка лучей света, параллельных этой диагонали? (Правильный шестиугольник).

Задача 1. На поверхности куба изобразить ломаную линию, вершины которой совпадают с отдельными вершинами куба, а звенья принадлежат:

a) одной грани куба;

b) разным граням;

c) проходят по диагоналям трех соседних гранях куба.

Задача 2. Найдите длину ломаной, расположенной на поверхности куба с объемом равным 8 см?; 64 см?, три вида которой даны на рисунке 1. Изобразите данную ломаную в тетради.

Рисунок 1

Задача 3. Найдите площадь поверхности и объем куба, если известно, что длина ломаной, три вида которой изображены на рисунке 2, равна 63 см; 92 см.

Рисунок 2

Задача 4. Ломаная ABCDEFG расположена на поверхности прямоугольного параллелепипеда, в основании которого лежит квадрат, площадь которого равна 36 см?, а объем параллелепипеда равен 144 см? (рис. 3).

а) Изобразите в тетради три вида ломаной;

b) найдите ее длину.

Рисунок 3

Задачи, связанные с построением геометрических фигур на координатной плоскости. В этих задачах ломаная определяется различными зависимостями, связанными с измерением геометрических величин, построением точек и т. д. Предварительный анализ задачи касается работы с рисунком, таблицей, чертежом, формулой.

Приведем примеры.

Задача 5. Для данных точек A(-4;2) и B(2;2) постройте точку C так, чтобы треугольник ABC был:

a)

прямоугольным;

остроугольным;

тупоугольным.

b)

равносторонним;

равнобедренным;

разносторонним.

Укажите координаты точки C. Что вы заметили?

Задача 6. Постройте прямоугольник ABCD, если координаты точек A(2; 3) и B (8; 3), а точка C лежит на оси абсцисс. Запишите координаты всех вершин прямоугольника.

Задача 7. Постройте прямоугольник ABCD, если известно, что сторона BC короче стороны AB в два раза. Точка A имеет координату (3; 0), точка B имеет такую же ординату как т. A, а точка C имеет абсциссу равную 6.

3) Задачи, «сталкивающие» школьника с реальной жизнью, т. е. касающиеся его предметно-практического опыта. Задания этой серии являются сюжетными задачами, решение которых предусматривает проявление инициативы, индивидуальности и творческого воображения учащихся. Эти задания могут быть отнесены к сюжетным

задачам нового типа, так как они предполагают создание ситуации «заведомо новой, ранее не возникавшей» на основе собственного прошлого опыта ученика и анализа задачной ситуации (т. е. впечатлений, полученных от прочтенного текста задачи).

Приведу примеры.

Задача 8. Построить ломаную на поверхности куба, три вида которой - спереди, сверху и слева - выглядят как самая приятная для ученика оценка.

Задача 11. Приходилось ли вам пришивать пуговицы? На рисунке 5 показано, как выглядит пришитая пуговица с лицевой стороны.

Рисунок 5

а)Покажите, как могут быть расположены нити с изнаночной стороны.

б)Покажите, как нужно пришивать эту пуговицу, чтобы с изнаночной стороны получилась ломаная линия (рис.6)?

Рисунок 6

Сколько вариантов расположения нити у вас получилось? Сравните свои рисунки с рисунками одноклассников?

Характер предложенных задач предполагает их выполнение в течение всего учебного года при изучении различных тем школьного курса математики, как бы разбрасывая отдельные задачи.

В задачах прослеживается разносторонняя работа с рисунком, чертежом, что не только способствует общему умственному развитию школьников, но развивает пространственное воображение, обеспечивая более полное и продуктивное изучение геометрии, и начинать эту работу необходимо в 5 – 6 классах при изучении математики.

Я же предлагаю вам сегодня задачи, для решения которых придется включить ваше воображение.

Вашему вниманию предлагается проекционный куб. Пример такого куба приведён в левом верхнем углу. (слайд).

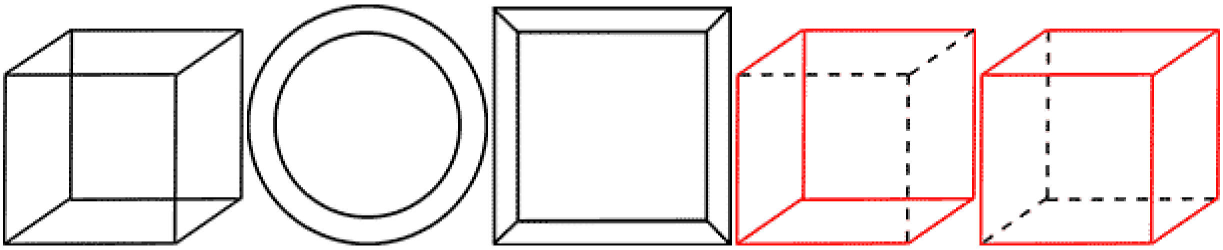
В каждом кубе с помощью линий зашифрованы буквы: одна, могут быть две или три буквы.

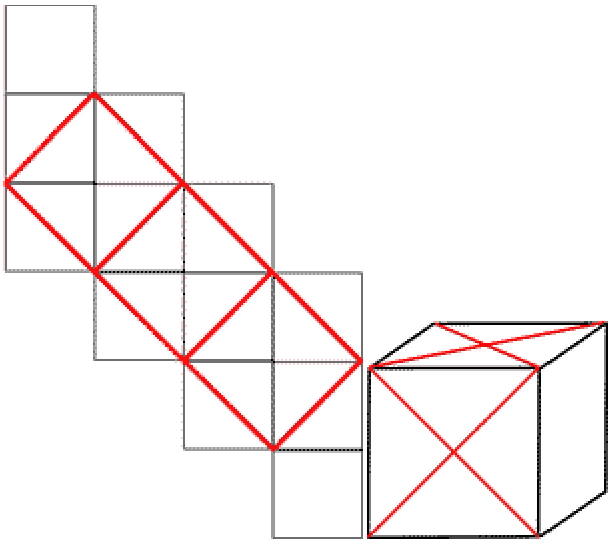
Чтобы узнать какие буквы зашифрованы в кубе нужно мысленно посмотреть на куб сверху, справа, или спереди. Тогда с помощью воображения можно понять, как спроецируются линии и какую букву можно увидеть.

Литература:

1. Александров А.Д. О геометрии // Математика в школе. - 1980. №3. - С.56-62.

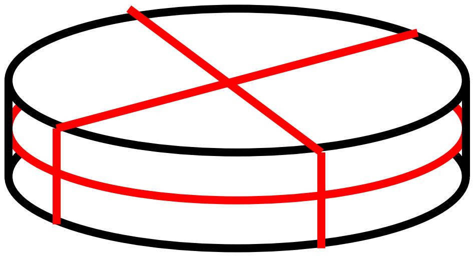
2. Педагогическая энциклопедия. Т. I. А-Е. 1964. - 832 с.



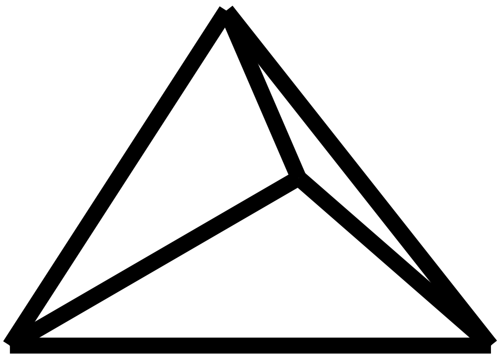


Приложение 1

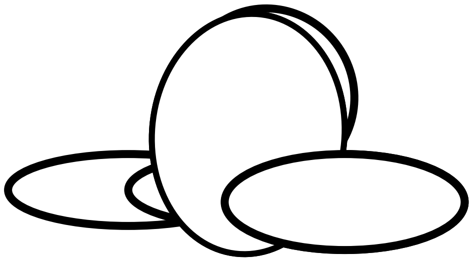
Задача 1.



Задача 2.



Задача 3.



Задача 4.